

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 03/02/14

- (1) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, tali che $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g = 1$. Posto

$$F(x, y) = f(x - y)g(x + y)$$

stabilire se F è integrabile su \mathbb{R}^2 , e se sì, calcolarne l'integrale.

Sol.: $G(u, v) = f(u)g(v)$ è misurabile su \mathbb{R}^2 , e per Tonelli risulta integrabile con integrale = 1. Applicando il cambiamento di variabili $u = x - y, v = x + y$ si ricava

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u, v) d\mu(u, v) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) d\mu(x, y)$$

e quindi $\int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) d\mu(x, y) = 1/2$.

- (2) Sia μ^* la misura esterna di Lebesgue su \mathbb{R}^n , sia $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mu^*(E) < \infty$. Provare che E è μ^* -misurabile se e solo se

$$\mu^*(E) = \sup \{ \mu^*(C) \mid C \text{ chiuso}, C \subset E \} .$$

Sol.: Poniamo $\nu(E) = \sup \{ \mu^*(C) \mid C \text{ chiuso}, C \subset E \}$, si osserva che vale sempre $\nu(E) \leq \mu^*(E) < \infty$.

Supponiamo E misurabile, per ogni n esiste $C_n \subset E$ chiuso tale che $\mu^*(E \setminus C_n) \leq 1/n$, da cui $\nu(E) \geq \mu^*(C_n) \geq \mu^*(E) - 1/n$ per ogni n . Quindi $\nu(E) = \mu^*(E)$.

Viceversa, supponiamo $\nu(E) = \mu^*(E)$, per ogni n esiste $C_n \subset E$ chiuso tale che $\mu^*(C_n) \geq \nu(E) - 1/n$, non è restrittivo supporre che i C_n costituiscano una successione crescente di insiemi. Sia $F = \cup C_n \in \mathcal{F}_\sigma$. Si ha $F \subset E$ e $\mu^*(F) = \nu(E) = \mu^*(E)$. D'altra parte per ogni n esiste O_n aperto tale che $E \subset O_n$ e $\mu^*(O_n) \leq \mu^*(E) + 1/n < \infty$, la successione degli O_n si può supporre decrescente. Poniamo $G = \cap O_n \in \mathcal{G}_\delta$. Vale $\mu^*(E) \leq \mu^*(G) \leq \mu^*(E)$, cioè $\mu^*(F) = \mu^*(E) = \mu^*(G)$. Quindi, dato che $\mu^*(E) < \infty$, $\mu^*(E \setminus F) \leq \mu^*(G \setminus F) = 0$, da cui E risulta misurabile.

- (3) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili q.o. finite su uno spazio con misura (X, \mathcal{A}, μ) , tale che $f_n \rightarrow f$ in misura, con f misurabile q.o. finita. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $|F'(t)| \leq 10$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Stabilire se

$$F(f_n) \rightarrow F(f) \text{ in misura} .$$

Sol.: Si nota preliminarmente che $F(f_n), F(f)$ sono definite quasi ovunque, e definendole in modo arbitrario dove $f_n = \pm\infty, f = \pm\infty$, rispettivamente, risultano funzioni misurabili q.o. finite. Per il teorema di Lagrange, vale quasi ovunque

$$|F(f_n) - F(f)| \leq 10|f_n - f|$$

quindi per ogni $\varepsilon > 0$, $\{|F(f_n) - F(f)| > \varepsilon\} \subset \{|f_n - f| > \varepsilon/10\}$, a meno di un insieme di misura nulla, da cui:

$$\mu(\{|F(f_n) - F(f)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon/10\}) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty.$$